

~ CURS 10 ~

II. TEORIA CIRCUITELOR ELECTRICE

1. Concepte de bază în teoria circuitelor electrice

1.1. Semnale electrice

Semnalele electrice sunt elemente esențiale ale teoriei circuitelor electrice, purtătoare de energie și de informații. O caracteristică importantă a unui semnal electric este modul în care aceasta variază în timp.

$m(t)$ – valoarea instantanee a semnalului

A. Semnal de curent continuu

Semnalele continue se caracterizează prin faptul că valoarea lor rămâne constantă în timp (pozitiv sau negativ).

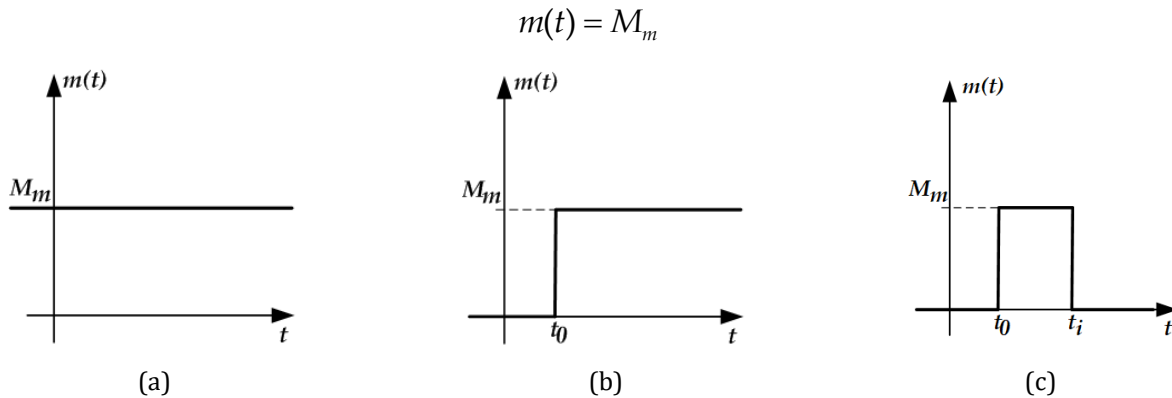


Fig. 1.1. Semnalul continuu (a), treaptă (b), respectiv impuls (c)

B. Semnal treaptă

Valoarea instantanee a acestui semnal satisface relațiile:

$$m(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < t_0 \\ M_m, & \text{pentru } t \geq t_0 \end{cases}$$

unde M_m este amplitudinea semnalului.

C. Semnal impuls

Este asemănător semnalului treaptă, cu observația că după un timp t_i , semnalul se anulează ($t_i - t_0 =$ durata impulsului):

$$m(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < t_0 \\ M_m, & \text{pentru } t_0 \leq t \leq t_i \\ 0, & \text{pentru } t > t_i \end{cases}$$

D. Semnale periodice

Un semnal a cărui succesiune de valori se reproduce în aceeași ordine, la fiecare T secunde se numește semnal periodic de perioadă T .

Valoarea semnalului satisface ecuația:

$$m(t) = m(t \pm nT), \text{ pentru } \forall t \text{ și } n=1,2,3,\dots$$

Din această categorie fac parte semnale sinusoidale, rectangulare, dinți de fierăstrău etc.

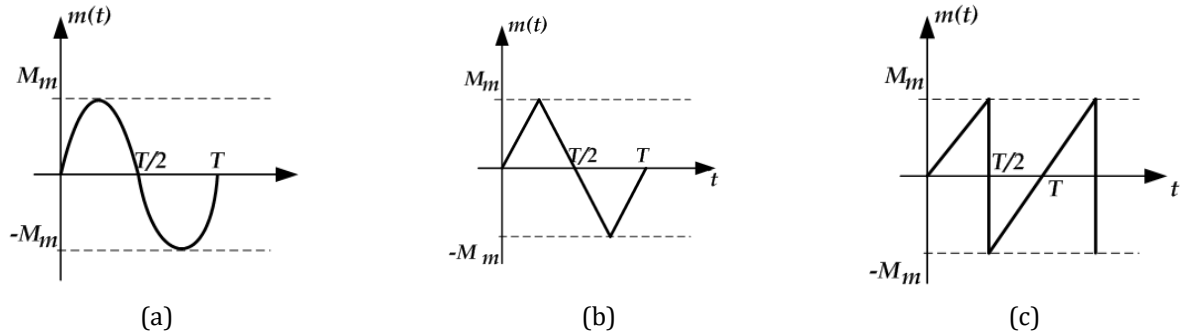


Fig. 1.2. Semnalul sinusoidal (a), triunghiular (b), respectiv dinți de fierăstrău (c).

Numărul de cicluri (oscilații) efectuate într-o secundă se numește frecvență și se măsoară în hertzi [Hz].

$$f = \frac{1}{T}$$

1.2. Ipotezele simplificatoare ale teoriei circuitelor electrice

Teoria circuitelor electrice cu parametri concentrați se elaborează prin particularizarea teoriei câmpului electromagnetic (ecuațiile lui Maxwell), în următoarele condiții de aproximare:

- caracterul quasistaționar al regimului presupune neglijarea curenților de deplasare i_D peste tot, cu excepția dielectricului condensatorului;
- energia câmpului magnetic este localizată numai în bobine, iar energia câmpului electric numai în condensatoare;
- se admite că intensitatea curentului care iese dintr-o bornă a unui element de circuit este egală cu intensitatea curentului care intră prin cealaltă bornă (adică, se presupune propagarea instantanee a semnalului electric);
- se consideră conductoarele filiforme, adică secțiunea transversală pe liniile de curent este suficient de mică pentru ca intensitatea curentului să fie repartizată practic uniform pe aceeași secțiune.

1.3. Regimurile de funcționare ale circuitelor electrice

După natura funcțiilor care exprimă variația în timp a intensităților curenților și tensiunilor, regimurile de funcționare ale circuitelor electrice se clasifică în:

- regim de curent continuu – în care mărimile de excitație (intensitățile curenților, tensiunile și potențialele electrice) sunt constante în timp;
- regim variabil – în care mărimile de excitație sunt funcții oarecare de timp;

- c) regim periodic – în care mărimile de excitație sunt funcții periodice de timp (sinusoidale);

Mai există o categorie de regimuri de funcționare a circuitelor electrice ce durează o perioadă scurtă de timp și fac legătura între două regimuri permanente, care se numesc regimuri tranzitorii.

1.4. Clasificarea elementelor de circuit

Elementele de circuit sunt modele idealizate (prin selectarea numai a uneia dintre proprietățile lor electrice sau magnetice, considerată esențială și neglijarea celorlalte). Un element de circuit este caracterizat printr-o relație între curentul și tensiunea la bornele sale, care în cel mai general mod se poate scrie sub formula:

$$u(t) = u(i(t), t)$$

După tipul ecuației caracteristice, elementele de circuit se pot clasifica în:

- a) elemente liniare, invariabile în timp:

$$u(t) = K \cdot i(t),$$

unde K este o constantă;

- b) elemente liniare, variabile în timp:

$$u(t) = K(t) \cdot i(t);$$

- c) elemente neliniare, invariabile în timp:

$$f(u(t), i(t)) = 0;$$

- d) elemente neliniare, variabile în timp:

$$g(u(t), i(t), t) = 0;$$

Tensiunea și intensitatea curentului sunt univoc determinate la bornele elementului de circuit și produsul lor se numește puterea instantanee:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t).$$

Integrala puterii în raport cu timpul pe un interval de timp (t_1, t_2) se numește energia electrică:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$

Din punct de vedere al valorii puterii instantanee, elementele de circuit pot fi clasificate în două categorii:

- a) elemente de circuit pasive, pentru care în orice punct al caracteristicii de funcționare $p > 0$, ceea ce înseamnă că elementul de circuit primește putere pe la borne;

- b) elemente de circuit active (sau surse), pentru care cel puțin într-un punct al caracteristicii de funcționare $p < 0$, ceea ce înseamnă că elementul de circuit cedează putere pe la borne.

1.5. Elemente pasive de circuit

- A. **Rezistorul** este un element de circuit a cărui ecuație de funcționare este de forma:

$$u(t) = u(i(t), t) - \text{caracteristica tensiune - curent}$$

$$i(t) = i(u(t), t) - \text{caracteristica curent - tensiune}$$

Pentru rezistor se consideră esențială mărimea sa numită rezistență, iar celelalte mărimi se neglijează (e_i, φ, q).

→ rezistorul liniar și invariabil în timp

$$u(t) = R \cdot i(t) \text{ sau } i(t) = G \cdot u(t)$$

unde, $R > 0$ (rezistență) [Ω], respectiv $G > 0$ (conductanță) [S] (fig. 1.3).

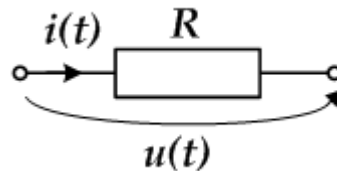


Fig. 1.3. Simbolul rezistorului electric liniar

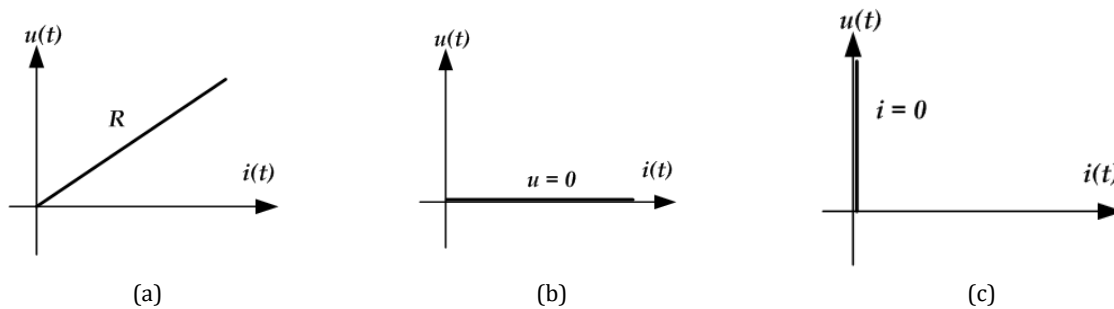


Fig. 1.4. Caracteristica rezistorului ideal (a), a scurtcircuitului (b), respectiv al întreruperii (golului) (c).

Obs: Pentru rezistență vom alege convenția receptorului de asociere a sensurilor curentului și tensiunii la borne (ambele în același sens).

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = G \cdot u^2(t) > 0$$

- ♣ dacă $R = 0$ ($G \rightarrow \infty$): scurtcircuit, $u(t) = 0$ și oricare $i(t)$ (fig. 1.4.b)
- ♣ dacă $R \rightarrow \infty$ ($G = 0$): gol (întrerupere), $i(t) = 0$ și oricare $u(t)$ (fig. 1.4.c)

→ rezistorul liniar, variabil în timp (parametric) (fig. 1.5a)

$$u(t) = R(t) \cdot i(t)$$

Un exemplu de astfel de element de circuit este potențiometrul, reostatul sau trimerul.

Acest element poate fi folosit în modelarea unui contactor real, cu ajutorul unui contactor ideal și a două rezistoare ideale și invariabile ($R_1 > >$ și $R_2 < <$) (fig. 1.5b).

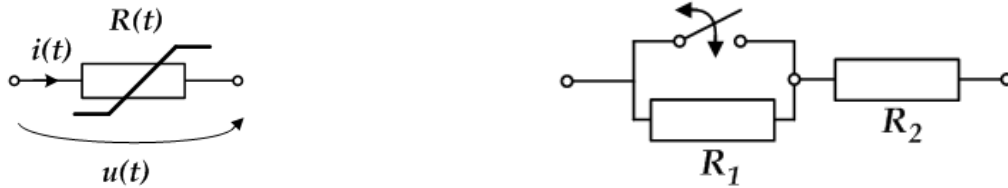


Fig. 1.5. Simbolul rezistorului liniar-parametric (a), respectiv schema echivalentă a potențiometrului (b)

→ rezistorul neliniar (fig. 1.6)

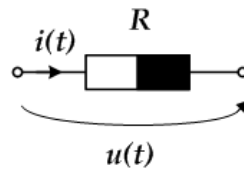


Fig. 1.6. Simbolul rezistorului neliniar

$f(u(t), i(t)) = 0$ - invariabil în timp

$g(u(t), i(t), t) = 0$ - variabil în timp

Ex: termistor – $R = f(T)$ (fig. 1.7a), foto-rezistor (LDR) (light dependent rezistor) (fig. 1.7b), varistor (voltage dependent rezistor) (fig. 1.7c).

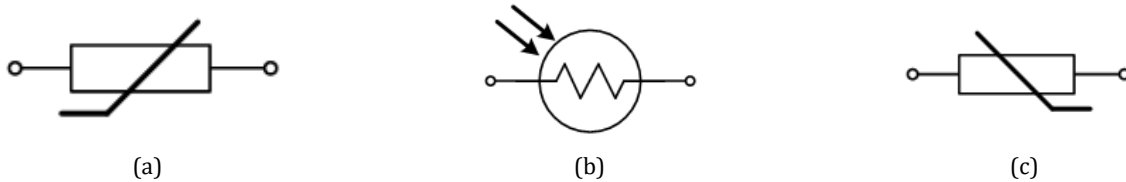


Fig. 1.7. Simbolul termistorului (a), LDR-ului (b), respectiv a varistorului (c).

B. Bobina electrică

→ bobina ideală necuplată magnetic are ecuația de funcționare:

$$\varphi(t) = \varphi(i(t), t)$$

numită caracteristica flux – curent (fig. 1.8a).

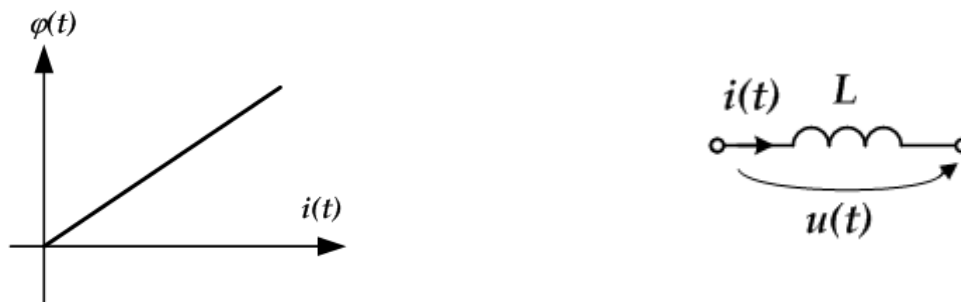


Fig. 1.8. Caracteristica flux-curent pentru bobină (a), simbolizarea bobinei ideale (b)

Pentru bobină se consideră esențial doar fluxul magnetic, iar celelalte mărimi se neglijează (R, q, e_i). Pe baza legii inducției electromagnetice, se deduce ecuația la bornele bobinei:

$$u_b = \frac{d\varphi}{dt},$$

numită ecuația de evoluție a bobinei, din care, prin integrare pe intervalul $(0, t)$ se obține:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t u(\tau) d\tau,$$

unde $\varphi(0) = \int_{-\infty}^0 u(\tau) d\tau$ este valoarea inițială a fluxului magnetic prin bobină.

→ bobina liniară, invariabilă în timp și necuplată magnetic

$$\varphi(t) = L \cdot i(t) \Rightarrow u(t) = L \frac{di(t)}{dt},$$

care integrată capătă forma:

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau,$$

unde $i(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u(\tau) d\tau$ este valoarea inițială a curentului prin bobină.

Bobina liniară, invariabilă în timp și necuplată magnetic este complet caracterizată de inductivitatea proprie L și de intensitatea curentului în momentul inițial $i(0)$ (fig. 1.8b).

Înmulțind ecuația caracteristică cu $i d\tau$ și integrând-o pe intervalul $(0, t)$ în condiția $i(0) = 0$, se obține energia magnetică acumulată de bobină:

$$W_m = \int_0^t u(\tau) i(\tau) d\tau = L \int_0^t i'(\tau) i(\tau) d\tau = \frac{1}{2} L i^2(\tau) \Big|_0^t = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) \cdot i(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi^2(t)}{L},$$

Dacă bobina este caracterizată de o rezistență nenulă ($R \neq 0$), pentru bobina reală se obține (fig. 1.9a):

$$u_b = u_f + \frac{d\varphi}{dt} = R \cdot i + L \frac{di(t)}{dt}.$$

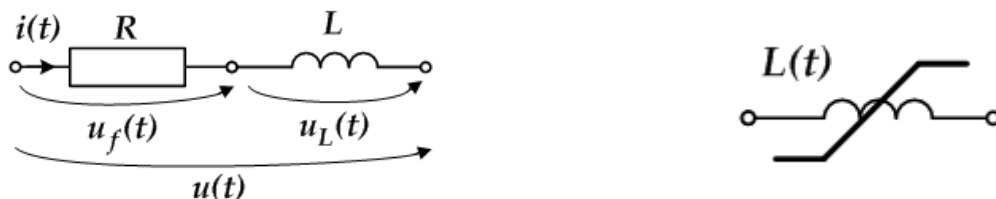


Fig. 1.9. Reprezentarea bobinei reale (a), respectiv simbolul bobinei parametrică (b)

→ bobina liniară, variabilă în timp (parametrică) și necuplată magnetic (fig. 1.9b).

$$\varphi(t) = L(t) \cdot i(t) \Rightarrow u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + i(t) \frac{dL(t)}{dt}.$$

$L(t)$ – inductivitatea parametrică.

Primul termen al membrului drept se numește cădere de tensiune inductivă prin pulsație, iar al doilea – căderea de tensiune inductivă parametrică.

→ bobina neliniară este o bobină cu miez feromagnetic ce intră în componența releelor, electromagneților, transformatoarelor și mașinilor electrice.

$$\varphi(t) = f(i(t))$$


$$\varphi(t) = g(i(t), t)$$


Fig. 1.10. Simbolul bobinei neliniare

Caracteristica magnetică poate fi o simplă curbă de magnetizare (materiale moi) sau chiar un ciclu de histerezis (materiale dure).

→ bobina cuplată magnetic

Pentru bobinele liniare și invariabile în timp, se spune că bobina s parcursă de curentul i_s este cuplată magnetic cu alte $(l-1)$ bobine dacă fluxul magnetic φ_s este funcție și de intensitățile curenților ce parcurg aceste bobine:

$$\varphi_s = \sum_{k=1}^l L_{Sk} i_k,$$

în care $L_{SS} = L_S = \left. \frac{\varphi_S}{i_S} \right|_{i_k=0, k \neq S} > 0$ - inductivitatea proprie, iar

$L_{Sk} = L_{kS} = \left. \frac{\varphi_S}{i_k} \right|_{i_k=0, k \neq S} \geq 0$ - inductivitate mutuală.

În aceste condiții, tensiunea la bornele unei bobine poate fi scrisă sub forma:

$$u_S = \sum_{k=1}^l L_{Sk} \frac{di_k}{dt} = L_S \frac{di_S}{dt} \pm \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq S}}^l L_{Sk} \frac{di_k}{dt},$$

unde primul termen reprezintă căderea de tensiune inductivă proprie, iar al doilea - căderea de tensiune inductivă mutuală.

Energia magnetică în cazul bobine cuplate magnetic se poate scrie:

$$W_m = \int_0^t u_S i_S d\tau = \frac{1}{2} L_S i_S^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq S}}^l \int_0^t L_{kS} i(\tau) d\tau,$$

unde primul termen este energia magnetică proprie bobinei (> 0), iar al doilea este energia magnetică mutuală (ce poate fi pozitivă sau negativă).

Pentru două bobine cuplate magnetic întâlnim formula:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_{12} i_1 i_2,$$

În circuitele electrice, bobine cuplate magnetic sunt reprezentate precum în figura 1.11, remarcându-se fie un cuplaj pozitiv (a), fie unul negativ (b).

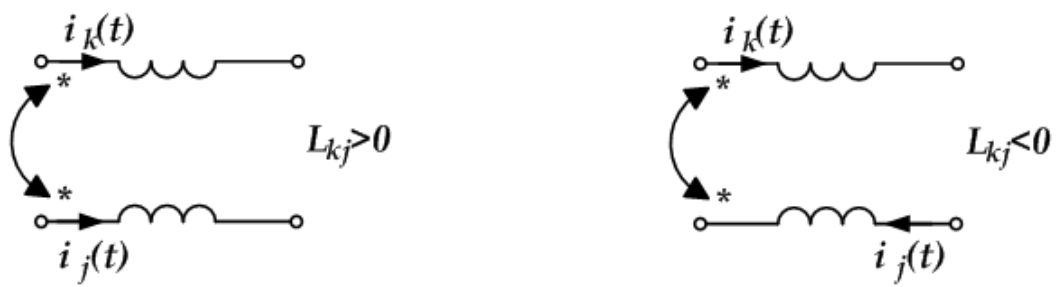


Fig. 1.11. Reprezentarea cuplajului pozitiv (a), respectiv al celui negativ (b) între bobine